

# 國科會科教處96年度數學教育專題研究計畫成果討論會

## 計畫名稱：動態立體幾何之方法及應用

主持人姓名：全任重 執行機關：國立清華大學數學系

計畫編號：96-2521-S-007-001-MY3 執行期限：2007/08/01 ~ 2010/07/31

### [計畫設計理念與構想]

態幾何研究的基本原理在於將一幅靜態的幾何圖形轉換成富有數學意義的動態模擬。自從 2004 年 9 月 Cabri 3D (<http://www.cabri.com/>) 問世以來，動態幾何的領域已經由平面幾何擴充到立體幾何及球面幾何。2007 年 12 月問世的 Cabri 3D 2.1.2 更新版增添了若干項重要功能，大幅提升數學實驗功效。

本計畫的目的在於研發 Cabri 3D 之數學實驗題材，特別是利用「凸包」來建構多面體的方法。該方法配合對偶關係之探討、條件建構、取截面、取交集等其他方法，能夠提升數學學習創新的層次，並且也能夠將傳統立體幾何物件給予現代數學的詮釋。

### [研究成果]

本計畫研發成功的重要的動態立體幾何方法包括下列 25 種方法：

 <p>取空間上對於球之反演 (Inversion of a point with respect to a sphere) 例：直線之反演</p>	 <p>探討 Space-filling Curve 例：<math>[\cos 13t, \sin 4t, \sin 17t]</math></p>	 <p>探討拓撲學中的實例 例：Möbius Band</p>	 <p>探討空間上的圖圖 例：由 Pentagonal Cupola 作圖設計所引發的 12 圓</p>
 <p>取多面體之截面 (cross-section of a polyhedron) 例：正十二面體之正十邊形截面</p>	 <p>取材於複變數函數論之作圖 例：Stereographic Projection</p>	 <p>取材於趣味數學經典之作圖 例：旋轉方塊 (取材於 H. Steinhaus, Mathematical Snapshots, p. 172)</p>	 <p>探討立體模型中之多邊形 (polyhedrons formed by regular polygons in space) 例：取 30 個正方形其頂點位於正十二面體之頂點位置</p>
 <p>探討由平面幾何所引發的立體幾何現象 例：Desargues 定理之推廣</p>	 <p>凸包法 (convex hull method) 例：取三個正四面體之凸包製作 Triangular Cupola.</p>	 <p>探討 MuPad、Maple、Cabri 3D 之比較 例：扭結 (Knot)</p>	 <p>探討微積分中的實例所引發的動態立體幾何作圖 例：兩 parabolic cylinder 所封閉的區域</p>
 <p>取多面體連集之凸包 (convex hull of the union of two polyhedra) 例：將菱形十二面體 (Rhombic Dodecahedron) 表示為正立方體與正八面體之連集之凸包</p>	 <p>條件建構 (Conditional Construction) 例：由正十二面體製作 Pentagonal Cupola</p>	 <p>探討 Villarceau 圓 例：由 Villarceau 圓引發的結構</p>	 <p>球面上的圓圈之探討 例：同軸圓 <a href="http://sylvester.math.nyu.edu.tw/d2/gc-06/11-15-06/coax2.html">http://sylvester.math.nyu.edu.tw/d2/gc-06/11-15-06/coax2.html</a></p>
 <p>菱形多面體 (Rhombic Polyhedron) 例：由十二-二十面體 (icosidodecahedron) 所引發的菱形多面體設計</p>	 <p>探討圓錐之截面 例：橢圓截面</p>	 <p>探討可投影到圓錐曲線之空間曲線 例：可投影到拋物線、雙曲線及圓之空間曲線</p>	 <p>探討直紋曲面 (ruled surface) 作圖 例：雙曲拋物面 (Hyperbolic Paraboloid)</p>
 <p>對偶關係之探討 (duality) 例：取正十二面體和正二十面體位於對偶位置之凸包製作正三十面斜方體 (Rhombic Triacanthedron)</p>	 <p>探討代數式子所啟發的幾何作圖 例：空間曲線 <math>(\cos 3t, \sin 4t, \sin 5)</math> 及其切線</p>	 <p>探討設計上的應用 例：Five Octahedra About an Icosidodecahedron</p>	 <p>取多面體之交集 例：五個正八面體之交集</p>

### [Dynamic Geometry and Its Connections]

**Conceptual Connections**

Geometry: Geometric Construction, Linkage, Spherical Geometry, Solid Geometry  
Analysis: Calculus, Interpolation  
History of Mathematics  
Recreational Mathematics  
Arts and Design

**Physical Connections**

Hyperlinks  
Java Applets

**Connections with the Real World**

Publishing  
Technology  
Graphics Calculator  
Conference  
Propaganda  
Mathematical Show

**Philosophical Connections**

Connectionism  
Constructivism  
Double Meanings  
Aesthetics  
Real and Virtual

**Educational Connections**

Science Fair  
Mathematics Competitions  
Fostering Innovation  
Tools for the Physically Challenged  
Courses

### [參考資料]

本計畫之研究結合下列碩士論文之內容：

- 黃建銘: Exploring the compass construction with Cabri geometry (使用 Cabri geometry 來探索圓規作圖)
- 李培德: Study linkage in dynamic geometry (研究動態幾何下的聯動桿裝置)
- 楊澤輝: Dissections under Dynamic Geometry (動態幾何下的圖形分割)
- 曾俊樂: Linkages under dynamic geometry (動態幾何下的運動桿)
- 黃鴻鈞: The tangents and osculating circles (切線與密切圓)
- 吳偉弘: A research of conics from five elements (五元素作圓錐曲線的探討)
- 張家郎: Archimedean solids and Johnson solids (利用 3D 動態幾何研究阿基米德與強森凸面體)
- 楊耀輝: The Tangents and Osculating Circle of Pedal Curves (垂足曲線之切線與密切圓)
- 張右欣: The classification and relationship among the geometric solids (幾何多面體的分類與關係)
- 林哲宇: Stellate polyhedrons (正多面體的星狀多面體)
- 謝志穎: Synthetic Construction Of The Catalan Solids (卡塔蘭多面體的綜合作圖)
- 蔣元召: Compounds of Cubes and Regular Octahedrons under Dynamic 3-D Geometry (動態 3-D 幾何下正立方體與正八面體的組合)
- 林精良: The Stellations of Rhombic Dodecahedron (菱形十二面體的星狀多面體)
- 張右欣: The Classification and Relationship Among the Geometric Solids
- 劉哲敏: A Discussion about Poncelet's Porism under Dynamic 2D and 3D Geometry (利用 2D, 3D 動態幾何討論 Poncelet's Porism)
- 葉晉壽: Geometric constructions associated with the regular dodecahedron (與正十二面體相關的幾何構造)
- 李鳳欣: The animation of regular polyhedrons (正多面體的動態模擬)
- 廖麗敏: Polyhedral constructions with the blocks (多面體的積木作圖)
- 呂建勳: Exploring Stienen's Porism with Cabri Geometry
- 顏瑋婷: Dual Polyhedra (對偶多面體)
- 郭亮偉: 透過電腦輔助建構動態學習環境之研究